

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 dicembre 1907.

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulle onde progressive di tipo permanente.*
Nota del Corrispondente T. LEVI-CIVITA.

1. — *Preliminari.*

Il moto di un liquido pesante avvenga in piani verticali fra loro paralleli, senza divario (sensibile) dall'uno all'altro di essi.

Pensiamo, per fissar le idee, ad un canale rettilineo a sponde verticali col medesimo stato di moto lungo ogni retta perpendicolare alle sponde. Basta allora occuparsi dell'andamento del fenomeno in una generica sezione parallela alle sponde.

Supponiamo che il fondo del canale sia orizzontale e che i caratteri qualitativi del moto siano quelli che corrispondono ad onde propagantisi entro il canale senza alterazione di forma. Si ha così a fare con perturbazioni *locali*, che danno al fenomeno l'apparenza di un movimento traslatorio orizzontale di tutta la massa fluida; in realtà, si deve ritenere nulla la portata complessiva attraverso una generica sezione trasversale del canale. Si potrà poi parlare di un livello medio del liquido (quello che si avrebbe in assenza della perturbazione ondosa).

2. — *Specificazione delle ipotesi.*

Mettiamo le ipotesi sotto forma analiticamente precisa.

Anzi tutto la qualifica « permanente » sta a significare che, per un osservatore dotato della traslazione apparente della massa fluida, il movimento ha carattere stazionario, ossia indipendente dal tempo.

Ciò posto, assumiamo un sistema di assi x, y animati da tale traslazione, essendo l'asse y verticale verso l'alto, l'asse x scorrente sul fondo e rivolto in senso opposto alla traslazione.

Per *velocità di propagazione* del moto ondoso si intende la velocità degli assi mobili x, y . Designandone con c il valore assoluto, si hanno le componenti $-c, 0$.

Diremo h la profondità (media) del canale, cioè la distanza fra l'orizzontale che segna il fondo e quella che segna il livello medio.

La regione del moto sarà rappresentata nel piano x, y (fig. 1) da una striscia indefinita L , limitata inferiormente dall'asse delle x e superiormente da una linea libera l , più o meno sinuosa, la quale differisce poco dalla

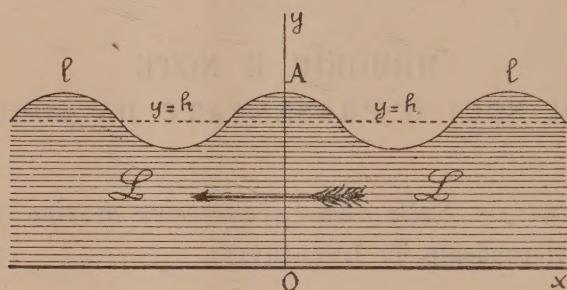


FIG. 1.

orizzontale $y = h$, quando si tratta di onde, che si riducono a semplici increspamenti.

Con questo andamento generale della l è poi possibile che essa consti di tratti riprodotendosi periodicamente (come nella fig. 1), oppure sia aperiodica (abbia per es. un solo massimo al disopra del livello medio, avvicinandosi asintoticamente alla $y = h$ da una parte e dall'altra del massimo). Il primo tipo comprende in particolare le così dette *onde oscillatorie semplici* (onde sinusoidali, dinamicamente possibili soltanto in prima approssimazione); l'esempio indicato pel secondo tipo è quello, pure ben noto, dell'onda solitaria, studiata sperimentalmente da Scott Russel e teoricamente (in via approssimata) da Boussinesq e da Lord Rayleigh (¹).

Quanto al movimento del liquido nella striscia L , supporremo che esso sia ovunque regolare e irrotazionale.

Esisterà perciò una funzione uniforme $\varphi(x, y)$ (potenziale di velocità), regolare entro L , tale che

$$(1) \quad d\varphi = u dx + v dy,$$

essendo u e v le componenti della velocità relativa nel punto generico (x, y) .

(¹) Cfr. per es. Lamb, *Hydrodynamics* (terza edizione) [Cambridge: University Press, 1906], Art. 248.

La (1) determina φ a meno di una costante additiva: converremo di prenderla in modo che sia $\varphi = 0$ nell'origine O delle coordinate.

Per l'incompressibilità del liquido, sarà φ funzione armonica, e si potrà quindi definire la funzione associata ψ (funzione di corrente) mediante l'equazione ai differenziali totali

$$(2) \quad d\psi = -v dx + u dy,$$

fissando anche qui la costante di integrazione in modo che ψ si annulli nell'origine.

Si noti che il campo L è semplicemente connesso, talchè la ψ risulta di necessità uniforme.

Introdurremo inoltre una condizione supplementare ovviamente suggerita dal tipo di movimenti che vogliamo studiare. Si tratta di perturbazioni ondose, cioè di movimenti vibratorii locali, che debbono ritenersi dotati di una velocità *assoluta* poco rilevante, in confronto della velocità di propagazione $(-c, 0)$. Ne viene che la velocità *relativa* non può differire gran che dalla traslazione $(c, 0)$: certo non può differirne quanto al senso generale del moto.

Ci troviamo così condotti ad ammettere che sia dappertutto $u > 0$, anzi che *sia positivo il limite inferiore dei valori di u . Con ciò anche il valore assoluto della velocità*

$$V = |1' u^2 + v^2|$$

(finito per le ipotesi precedenti) *avrà* (in tutto L , contorno compreso) *un limite inferiore diverso da zero.*

3. — Pressione. Condizioni ai limiti.

Per i moti irrotazionali, soggetti a forze conservative, e stazionari (rispetto ad assi fissi, ovvero dotati di una traslazione uniforme), le equazioni idrodinamiche si riassumono in un'unica relazione fra il valore assoluto della velocità, la pressione (divisa per la densità) e il potenziale (unitario) delle forze attive.

Nel caso presente si ha:

$$\frac{1}{2} V^2 + gy + p = \text{cost.} ,$$

designando al solito p la pressione, g l'accelerazione di gravità, e immaginando assunta l'unità di massa in modo che la densità del liquido risulti eguale ad 1. (Si lasciano indeterminate le unità di lunghezza e di tempo).

Sulla linea libera l , la pressione p è a ritenersi costante; sarà perciò

$$(3) \quad V^2 + 2gy = \text{cost.} , \text{ in ogni punto di } l.$$

Le altre condizioni ai limiti provengono dall'esprimere che tanto il fondo $y = 0$, quanto la linea libera l sono *linee di flusso*, cioè dirette come la velocità.

Indichiamo con s l'arco di una generica linea di flusso, contato a partire da una origine arbitraria nel senso del moto (ovunque ben determinato, per essere $V > 0$). Saranno $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ i coseni direttori della tangente nel senso del moto, e avremo, sopra una tale linea,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V},$$

donde, in virtù delle (1) e (2),

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = V, \\ \frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione mostra che ψ si mantiene costante sopra ogni linea di flusso; reciprocamente questa circostanza caratterizza una linea di flusso, perchè, se $\frac{d\psi}{ds}$ si annulla, lungo una qualche linea, ne segue

$$-v \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds} = 0,$$

cioè la tangente ha la direzione della velocità.

In O si è attribuito a ψ il valore zero; sarà perciò, qualunque sia x ,

$$(4) \quad \psi = 0, \text{ per } y = 0.$$

Volendo fissare il valore (costante) di ψ sopra l , basterà integrare la (2) da un punto generico del fondo ad altro, pure generico, della linea libera (seguendo un cammino qualsiasi interno a L). Integriamo per es. lungo l'asse delle ordinate da O sino all'intersezione A dell'asse con l . Avremo, essendo zero il valore di ψ in partenza, e designando con q il cercato valore d'arrivo,

$$q = \int_{OA} u \, dy,$$

quantità essenzialmente positiva, per l'ipotesi supplementare relativa alla u ⁽¹⁾.

Ne consegue

$$(5) \quad \psi = q, \text{ in ogni punto di } l.$$

Va notato che, in tutti i punti del campo L , la ψ rimane compresa

⁽¹⁾ Si osservi che, essendo 1 la densità del liquido, $q = \int_{OA} u \, dy$ non è altro che la portata del moto relativo per unità di larghezza del canale.

fra zero e q . Infatti, per ogni funzione armonica, regolare in un dato campo, i valori, relativi a punti interni, sono sempre compresi fra il limite superiore e il limite inferiore di quelli assunti al contorno. La ψ è appunto armonica e regolare in L e assume sul complessivo contorno di tale campo i valori zero e q .

L'equazione $\frac{d\varphi}{ds} = V$, ove si tenga conto che (sempre per l'ipotesi supplementare) V non scende mai al disotto di una certa costante positiva, mostra che φ cresce costantemente e indefinitamente con s , convergendo verso $+\infty$ quando si procede nel senso del moto, verso $-\infty$, quando si procede in senso opposto (lungo la linea di flusso, di cui si tratta; in particolare sul fondo o sulla linea libera l).

4. — Conseguenze analitiche. Inversione.

Posto

$$(6) \quad \begin{cases} x + iy = z, \\ u - iv = w, \\ \varphi + i\psi = f, \end{cases}$$

w ed f riescono notoriamente funzioni della variabile complessa z , in virtù

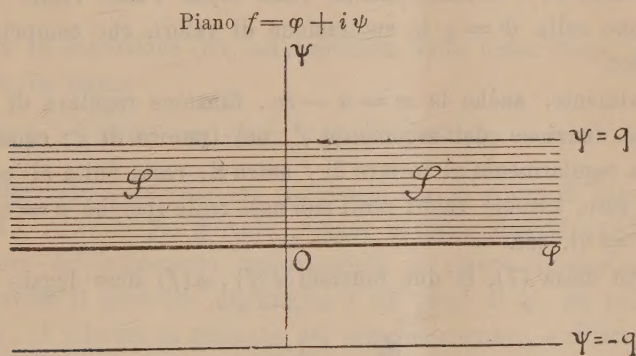


FIG. 2.

delle (1), (2); e le (1), (2) stesse si compendiano in

$$(7) \quad \frac{df}{dz} = w.$$

Al variare di z nel campo L , w si mantiene sempre regolare, resta finita all' ∞ , e il suo modulo $|w| = V$ non si annulla mai. La f è pure regolare (al finito), e $\left| \frac{df}{dz} \right|$ non si annulla mai a norma della (7).

Considerando un piano complesso, rappresentativo dei valori di f (fig. 2),

le proprietà delle funzioni φ e ψ , rilevate nel n. precedente, permettono di asserire quanto segue:

1. Mentre (nel piano del moto) z percorre l'asse reale da $x = -\infty$ a $x = +\infty$, anche f percorre (nel suo piano) l'asse reale, sempre nel senso delle ascisse crescenti, da $\varphi = -\infty$ a $\varphi = +\infty$.

2. Mentre z percorre la linea libera l , diciamo nel senso delle ascisse decrescenti (con che si viene a descrivere l'intero contorno del campo L , sempre in uno stesso verso), f percorre la parallela $\psi = q$ all'asse reale, l'ascissa φ decrescendo costantemente da $+\infty$ a $-\infty$.

3. Ad un generico punto z del campo L corrisponde nel piano f un punto della striscia S , compresa fra l'asse delle ascisse $\psi = 0$ e la parallela $\psi = q$.

Con ciò siamo autorizzati a concludere che la funzione $f(z)$ porge la rappresentazione conforme di L su S .

Infatti, sapendosi che $f(z)$ varia in S , mentre z varia in L , e che $\left| \frac{df}{dz} \right|$ non si annulla mai, basta che vi sia biunivocità di corrispondenza fra i contorni, perchè reciprocamente ad ogni punto f di S corrisponda uno ed un solo punto z di L ⁽¹⁾. Si può così riguardare z come funzione *uniforme* di f entro la striscia S .

Tale funzione è manifestamente reale sopra l'asse reale, regolare al finito, assume sulla $\psi = q$ la successione di valori, che compete alla linea libera l , ecc.

Naturalmente, anche la $w = u - iv$, funzione regolare di z in L , si può pensare funzione dell'argomento f , pel tramite di z : come tale, essa si comporta regolarmente al variare di f entro S , resta finita all' ∞ , e sempre diversa da zero, assume valori reali sull'asse reale (perchè $v = 0$ sul fondo, cioè per $\psi = 0$), ecc.

In virtù della (7), le due funzioni $z(f)$, $w(f)$ sono legate dalla relazione

$$(7') \quad \frac{dz}{df} = \frac{1}{w(f)}.$$

5. — *Riflessione. Equazione funzionale caratteristica.*

Le funzioni $z(f)$, $w(f)$, definite in tal modo entro la striscia S , sono entrambe reali sull'asse reale $\psi = 0$. Ne consegue, per il noto principio della riflessione analitica di Schwarz ⁽²⁾, che esse sono prolungabili analiti-

⁽¹⁾ Cfr. per es. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie* [Leipzig: Teubner, 1907], Cap. VIII, § 5.

⁽²⁾ Cfr. per es. Darboux, *Leçons sur le théorie générale des surfaces*, Vol. I [Paris: Gauthier-Villars, 1887], pag. 174-175.

camente nella sottostante striscia $\psi = 0$, $\psi = -q$, assumendo quivi valori coniugati a quelli, che loro spettano in S. Più precisamente, se in un punto generico $\varphi + i\psi$ di S è

$$\begin{cases} z(\varphi + i\psi) = x + iy, \\ w(\varphi + i\psi) = u - iv, \end{cases}$$

nel punto coniugato $\varphi - i\psi$ della striscia riflessa si avrà

$$\begin{cases} z(\varphi - i\psi) = x - iy, \\ w(\varphi - i\psi) = u + iv. \end{cases}$$

Riferiamo in particolare queste equazioni al valore $\psi = q$ (cui corrisponde nel piano z la linea libera l).

Avremo dalle due prime di ciascun gruppo, per sottrazione,

$$2y = -i \{ z(\varphi + iq) - z(\varphi - iq) \};$$

e dalle altre, per moltiplicazione,

$$V^2 = w(\varphi + iq) w(\varphi - iq),$$

y e V riferendosi, per un medesimo valore di φ , ad un medesimo punto di l .

Con ciò la condizione (3), caratteristica delle linee libere, si può presentare sotto la forma

$$(3') \quad w(\varphi + iq) w(\varphi - iq) - iq \{ z(\varphi + iq) - z(\varphi - iq) \} = \text{cost.}$$

Qui interviene l'osservazione essenziale che si tratta di funzioni analitiche. La (3'), ricavata per φ reale, rimane necessariamente valida per qualunque valore dell'argomento, appartenente al campo di esistenza. Si può dunque scrivere il generico argomento f al posto di φ . Se poi si deriva rispetto ad f , si elimina la costante del secondo membro, e si ricava, tenendo conto della (7'),

$$(E) \quad \frac{d}{df} \{ w(f + iq) w(f - iq) \} - iq \left\{ \frac{1}{w(f + iq)} - \frac{1}{w(f - iq)} \right\} = 0,$$

equazione mista (cioè insieme differenziale e alle differenze finite) nella sola $w(f)$.

È facile rendersi conto che la (E) caratterizza sostanzialmente il problema meccanico, tutto essendo ricondotto alla determinazione di integrali $w(f)$ di (E), reali sull'asse reale, regolari nella striscia $\psi = \pm q$, finiti all' ∞ , e tali che la parte reale u non scenda mai al disotto di una costante positiva (del resto comunque piccola).

Sia data infatti una tale $w(f)$, e si determini $z(f)$ a norma della (7'), prendendo la costante di integrazione in modo che sia $z = 0$ per $f = 0$. Questa funzione $z(f)$ risulta così reale sull'asse reale.

Essendo, per la (7') stessa,

$$dx + i dy = \frac{d\varphi + i d\psi}{u - iv},$$

si ha

$$\begin{cases} dx = \frac{u d\varphi - v d\psi}{V^2}, \\ dy = \frac{v d\varphi + u d\psi}{V^2}. \end{cases}$$

Consideriamo la funzione $y(\varphi, \psi)$. Essa si annulla sull'asse reale $\psi = 0$, e, per un altro punto generico della striscia S, si può immaginare ottenuta integrando lungo una perpendicolare all'asse reale ($d\varphi = 0$), a partire dalla sua intersezione coll'asse reale stesso.

Si ha così

$$y(\varphi, \psi) = \int_0^\psi u(\varphi, \psi) d\psi,$$

la quale mostra (in virtù dell'ipotesi concernente la u) che l'ordinata y è ovunque positiva, e rimane finita anche se φ cresce indefinitamente.

D'altra parte, mentre f percorre una generica parallela all'asse delle ascisse, $dx = \frac{u}{V^2} d\varphi$; quindi (sempre per l'ipotesi concernente u) la x varia, lungo la corrispondente linea del piano z , nello stesso senso di φ , da $-\infty$ a $+\infty$. Così in particolare a $\psi = q$ corrisponderà nel piano z una certa linea l , la quale possiede l'andamento qualitativo, già intuitivamente rilevato nelle linee libere.

Alla striscia S corrisponde in definitiva nel piano z un campo L, compreso fra l'asse reale $y = 0$ e la detta linea l . C'è corrispondenza *biunivoca* fra S ed L, e si può considerare la funzione inversa $f(z)$, e trarre per sostituzione una $w(z)$ dall'originaria soluzione $w(f)$ di (E).

Tale funzione $w(z)$ definisce effettivamente un moto ondoso permanente, che si svolge in L.

Infatti la (7') si ricambia nella (7), e così si è sicuri che sono soddisfatte nel campo L le equazioni indefinite, e che φ e ψ (parte reale e coefficiente di i in $f(z)$) costituiscono rispettivamente il potenziale di velocità e la funzione di corrente.

Rimangono pure soddisfatte, per costruzione, tutte le condizioni ai limiti.

Le (4) e (5), perchè l'asse reale $y = 0$ e la linea l corrispondono ordinatamente a $\psi = 0$ e a $\psi = q$. La (3), per l'ipotesi fondamentale che $w(f)$ sia integrale della (E): basta riflettere che da (E) si ripassa a (3') integrando rispetto ad f e considerando in particolare valori reali dell'argomento. La (3') è poi equivalente alla (3). C. D. D.

Val la pena di rilevare che la equazione (E) si trasforma in se stessa, cambiando f in $-f$. Ne viene che, se $w(f)$ è un integrale, lo è pure $w(-f)$.

6. — Onde oscillatorie.

Le onde di tipo permanente si chiamano *oscillatorie* quando, procedendo di un tratto costante λ (*lunghezza d'onda*) nel senso della propagazione, lo stato di moto della massa fluida si riproduce identicamente.

Ciò val quanto dire che $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono funzioni periodiche di x , di periodo λ .

Indichiamo alcune conseguenze di questa ipotesi.

Anzi tutto le differenze

$$\begin{aligned} \varphi(x + \lambda, y) - \varphi(x, y), \\ \psi(x + \lambda, y) - \psi(x, y), \end{aligned}$$

sono due costanti (perchè si annullano le loro derivate, tanto rapporto ad x , quanto rapporto ad y). Per valutarle, possiamo porre per es. $y = 0$. Siccome $\psi = 0$ per $y = 0$, così si riconosce che ψ , al pari di u, v , è *funzione periodica di x* .

Designando poi con ω la differenza costante $\varphi(x + \lambda, y) - \varphi(x, y)$, si può scrivere, ponendo anche x eguale a zero,

$$\omega = \int_0^\lambda u(x, 0) dx,$$

dove apparisce che ω è *essenzialmente positiva*.

Ne viene, pensando alla corrispondenza fra il piano z e il piano f , che ad una traslazione di ampiezza λ nel primo fa riscontro una traslazione di ampiezza ω nel secondo, l'una e l'altra nel senso positivo dei rispettivi assi delle ascisse.

Una funzione di z , che rimanga invariata per una tale traslazione, che ammetta cioè il periodo reale λ , diventa così, quando la si esprime per f , funzione periodica di tale variabile col periodo reale ω ; e reciprocamente.

L'ipotesi che si tratti di onde oscillatorie si traduce compendiosamente nella periodicità della funzione di variabile complessa $w(z)$. Si può sostituirvi, in base all'osservazione ora fatta, la periodicità di $w(f)$, e ritenere che: Condizione necessaria e sufficiente, affinchè le onde, definite da un integrale $w(f)$ della (E), siano oscillatorie, è che la $w(f)$ ammetta un pe-

riodo reale ω (seguitando beninteso a possedere gli altri caratteri qualitativi, di cui al n. precedente).

La lunghezza d'onda λ (incremento costante, che subisce $z(f)$, quando f si incrementa di ω) si può rappresentare, a norma della (7'), con l'integrale di $\frac{df}{w}$ da un f generico ad $f + \omega$, lungo un cammino pure generico. Scriviamo in particolare

$$(8) \quad \lambda = \int_0^\omega \frac{df}{w}.$$

Accanto alla espressione della lunghezza d'onda, giova fissare quella della profondità media h . Come definizione numerica di h si deve evidentemente assumere la media (per la lunghezza di un'onda) dei livelli (contati a partire dal fondo) delle superficie libere del liquido; cioè la media dei valori, assunti da y lungo la linea l , mentre x varia di λ , per es. da 0 a λ . Sarà dunque

$$h = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda y dx,$$

y ed x riferendosi alla linea l .

Sostituendo ad entrambe le loro espressioni per $z(\varphi + iq)$, $z(\varphi - iq)$, tenendo presente la (7') e la natura della corrispondenza fra il piano z e il piano f , si passa subito alla formula

$$(9) \quad h = \frac{1}{4i\lambda} \int_0^\omega \{ z(\varphi + iq) - z(\varphi - iq) \} \left\{ \frac{1}{w(\varphi + iq)} - \frac{1}{w(\varphi - iq)} \right\} d\varphi.$$

Fra i caratteri del moto *relativo* non può naturalmente figurare la velocità di propagazione c . È però facile definirla in termini delle due costanti q ed h . Basta ricordare (n. 1) che è inerente alla nozione di moto ondoso l'annullarsi della portata complessiva. D'altra parte (n. 3, nota) la portata relativa è q ; attribuendola esclusivamente alla traslazione, e badando al significato di h , si ha senz'altro

$$(9') \quad q = ch.$$

Può essere ancora opportuno assumere come variabile indipendente

$$(10) \quad \xi = e^{\frac{2\pi i f}{\omega}},$$

al posto di f .

Come è ben noto, ogni funzione $w(f)$, regolare nella striscia $S(\psi = \pm q)$ e avente per periodo ω , diventa, per la (10), funzione dell'argomento ξ , uniforme e regolare nella corona circolare C , che viene a corrispondere nel piano ξ alla striscia S del piano f .

Posto

$$(11) \quad \alpha = e^{-\frac{2\pi q}{\omega}}$$

(con che α risulta una frazione propria), la corona C si trova limitata dalle due circonferenze $|\xi| = \alpha$ internamente e $|\xi| = \frac{1}{\alpha}$ esternamente.

La equazione (E), per le (10) e (11), diviene

$$(E') \quad \xi \frac{d}{d\xi} \left\{ w(\alpha\xi) w\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right\} - \frac{g\omega}{2\pi} \left\{ \frac{1}{w(\alpha\xi)} - \frac{1}{w\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)} \right\} = 0,$$

e le condizioni qualitative, imposte alla w saranno le seguenti: essere regolare in C , reale sulla circonferenza $|\xi| = 1$, e tale che la sua parte reale u resti in tutta la corona al disopra di una costante positiva.

La (E') ammette una trasformazione in se stessa, che proviene, come è naturale, pel tramite della (10), da quella già avvertita per la (E). Si tratta — come del resto appare direttamente dalla (E') — dello scambio di ξ in $\frac{1}{\xi}$. Perciò ogni soluzione $w(\xi)$ della (E') dà luogo ad una seconda soluzione $w\left(\frac{1}{\xi}\right)$.

7. — Soluzioni approssimate. Onde oscillatorie semplici.

Equazione di Airy.

Supponiamo che la perturbazione ondosa sia molto piccola di fronte alla velocità di propagazione c , che è il caso interessante per la pratica. Allora, ponendo

$$(12) \quad w = c(1 + \varepsilon)$$

(talchè $|w - c| = c|\varepsilon|$ rappresenta, in valore assoluto, la velocità assoluta della perturbazione ondosa), potremo ritenere trascurabile $|\varepsilon|^2 = \frac{|w - c|^2}{c^2}$, e quindi ogni termine d'ordine superiore al primo, rispetto ad ε . Con ciò, portando nella (E) il valore (12) di w , si ha la equazione lineare in ε , caratteristica delle soluzioni approssimate:

$$(13) \quad \frac{d}{df} \{ \varepsilon(f + iq) + \varepsilon(f - iq) \} + \frac{ig}{c^3} \{ \varepsilon(f + iq) - \varepsilon(f - iq) \} = 0.$$

Riferiamoci al caso delle onde oscillatorie e consideriamo in conformità ε come funzione di ξ .

La (13) assume l'aspetto

$$(13') \quad \xi \frac{d}{d\xi} \left\{ \varepsilon(\alpha\xi) + \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right\} + \frac{g\omega}{2\pi c^3} \left\{ \varepsilon(\alpha\xi) - \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right\} = 0.$$

Questa equazione conserva naturalmente la proprietà, spettante ad (E'), di trasformarsi in se stessa, quando si cambia ξ in $\frac{1}{\xi}$. Perciò, assieme con una generica soluzione $\varepsilon(\xi)$, essa ammette la $\varepsilon\left(\frac{1}{\xi}\right)$, e anche la $\varepsilon(\xi) + \varepsilon\left(\frac{1}{\xi}\right)$, data la linearità.

L'osservazione ha importanza perchè permette di soddisfare con tutta facilità alla condizione, imposta a w , e di conseguenza ad ε , di essere reale per $|\xi| = 1$. Basta infatti considerare una soluzione $\varepsilon(\xi)$ a coefficienti reali, per essere sicuri che $\varepsilon\left(\frac{1}{\xi}\right)$ assume il valore coniugato, quando $|\xi| = 1$; con ciò $\varepsilon(\xi) + \varepsilon\left(\frac{1}{\xi}\right)$ risulta appunto reale.

D'altra parte, attesa la piccolezza di ε , rimane in ogni caso poco diversa da c la parte reale di w ; e così anche la condizione concernente u si trova senz'altro verificata.

Alla (13') si soddisfa nel modo più semplice, prendendo per ε una funzione lineare di ξ , diciamo $\frac{1}{2}\gamma\xi$, con γ costante reale abbastanza piccola, e ritenendo c , α ed ω legate dalla equazione

$$(14) \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} + \frac{g\omega}{2\pi c^3} \left\{ \alpha - \frac{1}{\alpha} \right\} = 0.$$

Dopo ciò, possiamo star certi che introducendo nella (12) $\frac{1}{2}\gamma \cdot \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)$ al posto di ε , si ha la rappresentazione di un effettivo moto ondosso oscillatorio.

L'espressione di w per f sarà, a norma della (10),

$$(15) \quad w = c \left\{ 1 + \gamma \cos \frac{2\pi f}{\omega} \right\}.$$

L'ipotesi che sia trascurabile ε^2 implica, per le soluzioni trovate, che lo sia γ^2 . Con ciò si ha

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c} \left\{ 1 - \gamma \cos \frac{2\pi f}{\omega} \right\},$$

e, per la (7'), avvertendo che si deve prendere $z=0$ per $f=0$,

$$(16) \quad z = \frac{1}{c} \left\{ f - \frac{\gamma \omega}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi f}{\omega} \right\}.$$

Segue di qua che f differisce da cz per un termine di primo ordine in γ . Perciò, trascurando sempre γ^2 , la (15) può essere scritta

$$(15') \quad w = c \left\{ 1 + \gamma \cos \frac{2\pi c}{\omega} z \right\}.$$

Dalla (8), o più direttamente dalla (15'), apparisce che, fra la costante ω e la lunghezza d'onda λ , passa la relazione semplicissima

$$(17) \quad \lambda = \frac{\omega}{c}.$$

L'equazione parametrica della linea l si ha manifestamente dalla (16), ponendo $f = \varphi + iq$ e separando il reale dall'immaginario. Coll'approssimazione convenuta, si può sostituire, nella espressione di y, cx al posto di φ e si ottiene

$$y = \frac{q}{c} - \frac{1}{2ic} \frac{\gamma \omega}{2\pi} \left\{ \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\omega} (cx + iq) - \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\omega} (cx - iq) \right\}.$$

Il valore medio di y al variare di x , per un periodo, è manifestamente $\frac{q}{c}$, talchè

$$(18) \quad h = \frac{q}{c},$$

conformemente alla osservazione generale del n. precedente [cfr. la formula (9')].

Mediante le (17) e (18), le due costanti ω e q rimangono espresse per elementi direttamente accessibili all'osservazione (la velocità c , la lunghezza d'onda λ e la profondità media h del canale). Sostituendo nella precedente espressione dell'ordinata della linea libera, si ha la nota forma (sinusoidale)

$$y = h - \frac{\gamma \lambda}{2\pi} \frac{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}{2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Sostituendo invece nella equazione fondamentale (13) (fra c, ω ed $\alpha = e^{-\frac{2\pi q}{\omega}}$) si ritrova la classica relazione di *Airy* ⁽¹⁾

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \frac{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} + e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}},$$

(1) Cfr. per es. Lamb, loco cit., Art. 228; oppure Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, T. III [Paris: Gauthier-Villars, 1903], pag. 468.

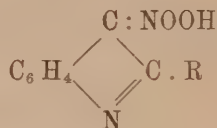
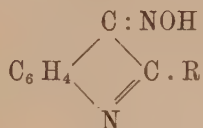
che definisce la velocità di propagazione c , in funzione della lunghezza d'onda λ e della profondità del canale h .

8. — Queste ed altre soluzioni approssimate sono state oggetto di numerose ricerche sia in ragione dell'interesse pratico, sia perchè la soluzione rigorosa del problema sembrava poco accessibile; almeno, prendendo direttamente le mosse delle equazioni idrodinamiche e cercando di applicare i metodi generali di integrazione. Ridotta come è ora ⁽¹⁾ la questione allo studio dell'equazione (E) [mista e non lineare, ma relativa ad un'unica funzione olomorfa $w(f)$], parmi fondata la speranza che le risorse dell'analisi moderna non si mostreranno inefficaci.

Chimica. — Nuove reazioni degli indoli e dei pirroli ⁽²⁾.

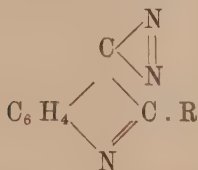
Nota del Corrispondente A. ANGELI e G. MARCHETTI.

In alcune precedenti comunicazioni abbiamo messo in rilievo che gli indoli e pirroli che hanno libero l'atomo di idrogeno in posizione β , per azione del nitrito d'amile oppure del nitrato di etile (in presenza di alcoolato sodico oppure di sodio metallico) con grande facilità forniscono i composti sodici dei derivati nitrosi e nitrici corrispondenti:

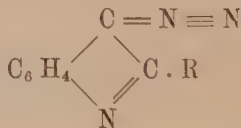


e che tale fatto stabilisce una nuova analogia fra il comportamento degli indoli e pirroli e quello dei fenoli.

Tali prodotti, per riduzione, forniscono gli amminoderivati, i quali per trattamento con acido nitroso danno i composti diazoici:



ovvero



⁽¹⁾ Va notato che il sig. P. Rudzki (*Math. Ann.*, B. L., 1898; pagg. 269-281) era già riuscito con un ingegnoso artificio a liberarsi delle condizioni ai limiti, sfruttando la teoria delle funzioni. Tuttavia la effettiva determinazione della sua funzione ausiliaria Θ implica ancora una discussione di tipo incognito. La (E) sintetizza invece nitidamente tutta la difficoltà.

⁽²⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica del R. Istituto di Studi superiori in Firenze.

Anche questa reazione, come ognuno vede, procede in modo analogo a quanto si verifica per gli amminofenoli.

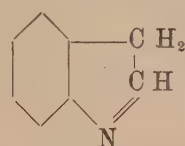
Le nuove esperienze, che descriveremo nella presente comunicazione preliminare, si riferiscono invece ai prodotti di condensazione che si possono ottenere dagli indoli e pirroli con gli eteri degli acidi carbossilici e che del pari si compiono in presenza di alcoolato sodico ovvero di sodio metallico.

Tali reazioni corrispondono perfettamente a quelle che Claisen ed altri chimici hanno effettuato sopra i chetoni, eteri carbossilici ecc. e perciò trovano un esatto riscontro in quelle che presentano gli ordinari composti alifatici ovvero a catena aperta, che cioè non possiedono più quei caratteri, molte volte non bene definibili, che di solito vengono chiamati aromatici.

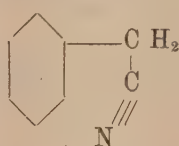
E per limitarci ad un solo esempio, ricorderemo a questo riguardo che le nuove reazioni da noi scoperte trovano un completo parallelismo con quelle che presenta il cianuro di benzile:



e che l'analogia apparisce ancora più evidente quando si comparino fra di loro le formole di struttura dell'indolo e del nitrile fenilacetico:

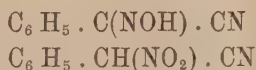


indolo
(forma tautomera)



cianuro di benzile

Infatti anche il cianuro di benzile, a parità di condizioni, fornisce l'isomero nitroso ed il nitroderivato



e può condensarsi con gli eteri carbossilici.

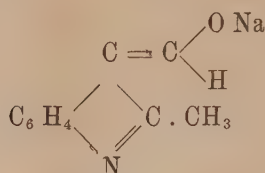
Ancora non è stato studiato il modo di comportarsi dell'amminoderivato rispetto all'acido nitroso, ma non v'ha dubbio che esso pure, come è stato osservato per composti analoghi, fornisca un prodotto diazoico.

Per le nostre esperienze abbiamo impiegato l' α -metilindolo, come il più facilmente accessibile, riservandoci di estendere le nuove reazioni anche agli altri derivati dell'indolo e del pirrolo.

Azione del formiato di amile.

Come nei casi analoghi, è preferibile impiegare il formiato di amile invece dell'etere etilico.

Si ottiene così un sale sodico al quale molto probabilmente spetta la struttura :



dal quale, anche per semplice azione dell'acqua, con tutta facilità si può avere il prodotto libero che è identico alla metilindolaldeide di Plancher e Ponti.

Come gli altri composti ossimetilenici, non reagisce con la biossiammoniacca.

Una molecola di metilchetolo e di etilato sodico vennero sciolti in etere assoluto ed al liquido raffreddato con ghiaccio, si aggiunge poco per volta una molecola di formiato di amile. Dopo qualche giorno si separa un prodotto che raccolto su filtro venne lavato con etere assoluto: si ottiene così una polvere giallognola che attira l'umidità dell'aria.

Non si scioglie completamente nell'acqua perchè in gran parte viene subito idrolizzato; la decomposizione è completa se si aggiunge qualche goccia di acido acetico. Il prodotto separato è quasi puro; fonde a 198° ed all'analisi ha dato i seguenti numeri: gr. 0,1441 di sostanza fornirono cc. 11,5 di azoto a 22° e 754 mm.

In 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{10}\text{H}_9\text{NO}$
N	9,14	8,82

Al pari del prodotto di Plancher e Ponti, dall'etere acetico si deposita in lunghi aghi che col tempo si trasformano in prismi incolori.

Allo scopo di meglio identificare il nostro composto con la sostanza che Plancher e Ponti ottennero per azione del cloroformio e potassa sull' α -metilindolo ne preparammo il *p*-nitrofenilidrazone.

gr. 0,105 diedero cc. 17,1 di azoto a 12 e 751 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{16}\text{H}_{14}\text{N}_4\text{O}_2$
N	19,28	19,05

Il semicarbazone venne purificato dall'alcool.

gr. 0,1304 di sostanza diedero cc. 29,6 di azoto a 23° e 755 mm.

In 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{11}\text{H}_{12}\text{N}_4\text{O}$
N	26,01	25,97

In modo analogo reagisce col formiato di amile il α - α -dimetilpirrolo. In questo caso però dall'etere non si separa il sale sodico, e perciò, data la piccola quantità di prodotto di cui potevamo disporre, scacciato l'etere, trattammo direttamente il residuo con soluzione acetica di *p*-nitrofenilidrazina. Dal liquido, intensamente colorato in rosso bruno, dopo qualche giorno si separano cristalli lucenti, colorati in rosso che hanno tutto l'aspetto dell'acido cromico. Si scioglie in acetone ed in alcool, da cui si separa in aghetti che fondono a 210°.

gr. 0,0944 di sostanza diedero cc. 18,0 di azoto a 25° e 739 mm.

In 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{13}H_{14}N_4O_2$
N	21,72	21,70

Azione dell'ossalato etilico.

Si opera come nel caso precedente; solamente, invece di etilato sodico, venne impiegato sodio metallico ridotto in fili. Dopo qualche giorno si separa un sale che si lava con etere e quindi si decompone con acqua acidulata con poco acido acetico. Il prodotto che si ottiene viene ricristallizzato dal benzolo, da cui si separa in aghi gialli che fondono a 126°.

L'analisi diede i seguenti risultati:

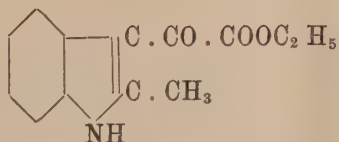
I. gr. 0,1589 di sostanza fornirono gr. 0,3940 di anidride carbonica e gr. 0,0843 di acqua.

II. gr. 0,1945 di sostanza fornirono cc. 10,7 di azoto a 24° e 740 mm.

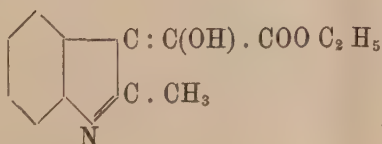
Da cui in 100 parti:

	Trovato		Calcolato per $C_{13}H_{13}NO_3$
	I.	II.	
C	67,62	—	67,53
H	5,88	—	5,62
N	—	6,17	6,06

Si tratta quindi dell'etere α -metilindolossalico al quale spetta senza dubbio la formola:



ovvero la tautomera:



Per riscaldamento con soluzione acquosa alcoolica di potassa, questo etere viene facilmente saponificato; acidificando il liquido, si separa l'acido, che, a differenza dell'etere, è quasi insolubile in benzolo ed in etere; si scioglie facilmente in alcool ed in acetone.

Per riscaldamento imbrunisce, e verso 190° si decompone con sviluppo gassoso; bollito con acido solforico diluito, colora intensamente il liquido in rosso fucsina.

gr. 0,2001 di sostanza diedero cc. 12,1 di azoto a 17° e 744 mm.

In 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_9NO_3$
N	6,97	6,89

Azione dell'acetato di etile.

Si operò come nei casi precedenti, vale a dire si impiegarono quantità equimolecolari di α -metilindolo, etere acetico ed etilato sodico, in soluzione eterea. In questa reazione ancora non ci fu possibile avere il derivato monoacetilico. Si scaccia l'etere ed il residuo viene distillato in corrente di vapore che trasporta il metilindolo che non ha reagito. Rimane indietro una sostanza che si purifica dal benzolo bollente; si ottiene così in cristalli splendenti che fondono a 203°.

All'analisi diede i seguenti risultati.

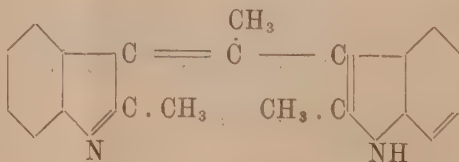
I. 0,1814 di sostanza diedero gr. 0,5570 di anidride carbonica e 0,1080 di acqua.

II. gr. 0,1349 di sostanza diedero cc. 11,9 di azoto a 23° e 742 mm.

In 100 parti:

	Trovato		Calcolato per $C_{20}H_{18}NO_2$
	I.	II.	
C	83,73	—	83,92
H	6,61	—	6,29
N	—	9,93	9,79

Con tutta probabilità si tratta di un prodotto di condensazione del derivato acetilico formatosi in una prima fase con una molecola di metilindolo, e la sua struttura si potrebbe forse rappresentare con lo schema:



che sarebbe analogo a quello dei prodotti di condensazione fra indoli ed aldeidi preparati da Emilio Fischer.

Questa sostanza, che si forma in piccola quantità, per azione dell'acido nitroso, assieme con una resina dà un composto che possiede i caratteri del nitrosometilindolo.

Proseguiremo lo studio di queste reazioni.

Meccanica. — *Un teorema sulle equazioni dell'elasticità.* Nota di O. TEDONE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Allo scopo di dare alla nostra esposizione maggiore semplicità e simmetria, abbandoneremo le abituali notazioni ed indicheremo, intanto, con x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane di un punto e con u_1, u_2, u_3 le componenti dello spostamento. Il teorema che ci proponiamo di stabilire, ponendo:

$$(1) \quad Df = \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{i,j} = a_{j,i} \quad ; \quad \theta = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

ed indicando con $a_{i,j}, \alpha_{i,j}$ certe costanti, risponde alla seguente domanda: *Sotto quali condizioni le equazioni dell'equilibrio elastico possono porsi sotto la forma:*

$$(2) \quad Du_i + \sum_j \beta_{i,j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

le β essendo altre costanti?

Quando ciò accada θ soddisfa all'equazione del second'ordine

$$(3) \quad D\theta + \sum_{h,k} A_{h,k} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_h \partial x_k} = 0, \quad A_{h,k} = \sum_i \alpha_{i,h} \beta_{i,k}$$

mentre le u_i , come nel caso dell'isotropia, soddisfano ad una stessa equazione del quart'ordine

$$(4) \quad D \left(Du_i + \sum_{h,k} A_{h,k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_k} \right) = 0,$$

diversamente da ciò che accade nel caso generale in cui le u_i soddisfano ad una stessa equazione del sesto ordine.

2. Affinchè le equazioni (2) possano essere interpretate come equazioni di equilibrio elastico è necessario, intanto, che esse possano ottenersi annullando la variazione prima di un integrale triplo esteso ad una funzione omogenea, di secondo grado, a coefficienti costanti, delle derivate prime delle u_i rispetto alle x_j , ossia, secondo la denominazione introdotta dal Somigliana, è necessario che le (2) formino un sistema simmetrico. Si trova

subito che ciò accade solo quando, per ogni sistema di valori di i e j , è $\beta_{i,j} = m\alpha_{i,j}$, m essendo una nuova costante che può, senza inconvenienti, anche suporsi eguale ad uno. Supposto queste condizioni soddisfatte, le equazioni (2) diventano:

$$(2') \quad Du_i + \sum_j \alpha_{i,j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

e provengono dall'annullare la variazione prima di un integrale triplo esteso alla funzione

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= \sum_{k,i,j} a_{i,j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \theta^2 = \\ &= \sum_{k,i,j} a_{i,j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

3. La f non è però la funzione più generale che goda delle proprietà richieste. Se alla superficie di una certa regione S dello spazio, arbitraria, sono assegnati valori fissi per u_1, u_2, u_3 , vi sono infinite funzioni φ della natura di f , tali che la variazione prima dell'integrale

$$\int_S \varphi dS$$

sia identicamente nulla e la espressione più generale di questa funzione è

$$(6) \quad \varphi = \sum_{i,j} b_{i,j} \frac{d(u_i, u_{i+1})}{d(x_j, x_{j+1})} \quad i, j = 1, 2, 3$$

dove le b sono costanti arbitrarie. Quindi la funzione più generale che abbia tutte le proprietà richieste dalla f sarà

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi &= f + \varphi = \sum_{k,i,j} a_{i,j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{i,j} b_{i,j} \frac{d(u_i, u_{i+1})}{d(x_j, x_{j+1})}. \end{aligned} \right.$$

4. Affinchè poi π sia un potenziale elastico e, quindi, le (2') possano essere interpretate come equazioni dell'elasticità, si richiede ancora che π dipenda dalle derivate $\frac{\partial u_p}{\partial x_q}$ soltanto per mezzo delle combinazioni:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Per trovare le condizioni che devono essere verificate fra le costanti che compaiono in π affinchè il fatto indicato si verifichi, poniamo:

$$(8) \quad e_{p,q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right) \quad \varpi_{p,q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} - \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right).$$

Avremo allora:

$$(9) \quad e_{p,q} = e_{q,p} \quad , \quad \varpi_{p,q} = -\varpi_{q,p} \quad , \quad \varpi_{p,p} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{U}_p}{\partial x_q} = e_{p,q} + \varpi_{p,q} ,$$

e, ritenendo per un momento le $e_{p,q}$ come variabili indipendenti in modo che non si tenga conto delle relazioni $e_{p,q} = e_{q,p}$, avremo anche

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \pi \left(\frac{\partial \mathcal{U}_p}{\partial x_q} \right) &= \pi(e_{p,q} + \varpi_{p,q}) = \pi(e_{p,q}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial \pi}{\partial e_{i,i+1}} - \frac{\partial \pi}{\partial e_{i+1,i}} \right) \varpi_{i,i+1} + \pi(\varpi_{p,q}) , \end{aligned} \right.$$

dove, è quasi inutile dirlo, la π che compare sotto i segni di derivazione è $\pi(e_{p,q})$. Devono dunque essere verificate identicamente le equazioni:

$$(11) \quad \pi(\varpi_{p,q}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \pi}{\partial e_{i,i+1}} - \frac{\partial \pi}{\partial e_{i+1,i}} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 .$$

Poichè ora si può scrivere:

$$\begin{aligned} \pi(\varpi_{p,q}) &= \sum_i [a_{i,i} + a_{i+1,i+1} + b_{i,i} + \frac{1}{2} (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i})^2] \varpi_{i,i+1} \\ &+ \sum_i [2a_{i+1,i+2} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+2} - \alpha_{i+2,i}) - b_{i,i+2} - b_{i+2,i}] \varpi_{i,i+1} \varpi_{i,i+2} \end{aligned}$$

la prima delle (11) ci dà:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{i,i} + a_{i+1,i+1} + b_{i,i} + \frac{1}{2} (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i})^2 &= 0 , \\ 2a_{i+1,i+2} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+2} - \alpha_{i+2,i}) - b_{i,i+2} - b_{i+2,i} &= 0 \\ i &= 1, 2, 3 . \end{aligned} \right.$$

Analogamente, dall'essere

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial e_{i,i+1}} - \frac{\partial \pi}{\partial e_{i+1,i}} &= 2 \sum_h a_{i+1,h} e_{i,h} - 2 \sum_h a_{i,h} e_{i+1,h} + \\ &+ (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) \sum_h \alpha_{h,h} e_{h,h} + (b_{i,i+1} - b_{i+1,i}) e_{i+1,i+2} + \\ &+ (b_{i+2,i} - b_{i,i+2}) e_{i+2,i} + (b_{i+1,i+2} - b_{i+2,i+1}) e_{i+2,i+2} , \end{aligned}$$

tenendo anche conto delle (9), le ultime equazioni (11) ci danno:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} 2a_{i,i+1} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) \alpha_{i,i} &= 0 , \\ -2a_{i,i+1} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) \alpha_{i+1,i+1} &= 0 , \\ (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) \alpha_{i+2,i+2} + b_{i+1,i+2} - b_{i+2,i+1} &= 0 , \\ 2(a_{i+1,i+1} - a_{i,i}) + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i}) &= 0 , \\ 2a_{i+1,i+2} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+2} + \alpha_{i+2,i}) + b_{i+2,i} - b_{i,i+2} &= 0 , \\ -2a_{i,i+2} + (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i+1,i+2} + \alpha_{i+2,i+1}) + b_{i,i+1} - b_{i+1,i} &= 0 , \\ i &= 1, 2, 3 . \end{aligned} \right.$$

Le (12) e le (13) formano un sistema di 24 equazioni dalle quali eliminando le quindici costanti a e b , si ottengono le equazioni seguenti fra le sole α :

$$(14) \quad \begin{cases} (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i} + \alpha_{i+1,i+1}) = 0, \\ \sum_{i=1}^3 (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i}) = 0, \\ (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i,i+2} + \alpha_{i+2,i}) - (\alpha_{i+1,i+2} - \alpha_{i+2,i+1}) (\alpha_{i,i} + \alpha_{i+1,i+1}) = 0, \\ (\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i}) (\alpha_{i+1,i+2} + \alpha_{i+2,i+1}) - (\alpha_{i+2,i} - \alpha_{i,i+2}) (\alpha_{i,i} + \alpha_{i+1,i+1}) = 0, \end{cases}$$

potendo, nella 1^a, 3^a e 4^a di queste equazioni, l'indice i assumere i valori 1, 2, 3 e gli indici essendo eguali quando sieno congrui rispetto al mod. 3.

5. Le equazioni (14) del primo rigo ci mostrano che possiamo distinguere quattro casi a seconda che nessuna, una, due, o tre delle differenze $\alpha_{i,j} - \alpha_{j,i}$ si annullano. Però le equazioni (14) del 3° e 4° rigo mostrano che quando, per un determinato valore di i , sia $\alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i} = 0$, basta che una delle altre due differenze $\alpha_{i+1,i+2} - \alpha_{i+2,i+1}$, $\alpha_{i+2,i} - \alpha_{i,i+2}$ sia diversa da zero perchè si abbia di necessità anche $\alpha_{i,i} + \alpha_{i+1,i+2} = 0$. Si conclude di qui che i quattro casi precedenti si riducono soltanto ai due casi:

$$1^\circ. \alpha_{i,i+1} - \alpha_{i+1,i} = 0, i = 1, 2, 3; \quad 2^\circ. \alpha_{i,i} + \alpha_{i+1,i+1} = 0, i = 1, 2, 3.$$

1°. Nel primo caso le (14) sono, senz'altro, identicamente soddisfatte, mentre le (12) e (13) ci danno:

$$a_{i,j} = b_{i,j} = 0, i \neq j; \quad a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = n, \quad b_{1,1} = b_{2,2} = b_{3,3} = -2n,$$

e quindi

$$(15) \quad \pi = 2n [\sum_i (e_{i,i}^2 + 2e_{i,i+1}^2) - (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2] + \frac{1}{2} (\sum_{i,j} \alpha_{i,j} e_{i,j})^2$$

$$\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}.$$

In questa espressione di π la n e le $\alpha_{i,j}$ restano completamente arbitrarie.

2°. Nel secondo caso si richiede intanto che sia:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{i,j} = 0, \quad b_{i,j} = b_{j,i} \quad i \neq j;$$

dalle (14) si deduce anche:

$$\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i} = 0, \quad i \neq j$$

e, quindi dalle (12) e (13):

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = n, \quad b_{ii} = -2n - 2\alpha_{i,i+1}^2,$$

$$b_{i,i+1} = -2\alpha_{i,i+1}\alpha_{i+1,i+2}, \quad i = 1, 2, 3$$

e restano arbitrarie le costanti $n, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,1}$.

Nell'espressione di π , corrispondente a questo caso, la parte che ha per fattore n coincide con l'analoga espressione che compare in (15). Scriveremo quindi soltanto l'altra parte che è

$$(16) \quad -2 \left[\sum_i \alpha_{i,i+1}^2 (e_{i,i} e_{i+1,i+1} - e_{i,i+1}^2) + \sum_i \alpha_{i,i+1} \alpha_{i+1,i+2} (e_{i,i+1} e_{i+1,i+2} - e_{i+1,i+1} e_{i,i+2}) \right].$$

Se nella (15) si pone $\alpha_{11} = \alpha_{26} = \alpha_{33}$, $\alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{1,2} = 0$, si ha il caso dell'isotropia.

Biologia. — *Contributo alla conoscenza della spermatogenesi negli Ortotteri* ⁽¹⁾. Nota preliminare del dott. GUSTAVO BRUNELLI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Oggetto delle mie ricerche è stato il *Gryllus* (in particolare *Gryllus desertus*) la cui spermatogenesi in parte già ci è nota, grazie ai lavori di Baumgartner ⁽²⁾, di Voïnov ⁽³⁾ e di Gutherz ⁽⁴⁾.

Alcuni fatti da me posti in luce circa le cinesi spermatogoniali, il comportamento dell'eterotropocromosomo ⁽⁵⁾, la pseudoriduzione, la meiosi ⁽⁶⁾ saranno qui brevemente esposti e poi sviluppati nel lavoro definitivo.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Istituto di Anatomia comparata. Roma.

⁽²⁾ Baumgartner W. J., *Spermatid transformations in Gryllus assimilis, with special reference to the Nebenkern*. Kansas University Science Bulletin, 1902, vol. I; *Some new evidences for the individuality of chromosomes*, Biol. Bull., vol. 8°, 1904.

⁽³⁾ Voïnov N., *Sur une disposition spéciale de la chromatine, dans la spermatogénèse du Gryllus campestris, reproduisant des structures observées seulement dans l'ovogénèse*. Arch. zool. expér., vol. 2°, 1904.

⁽⁴⁾ Gutherz S., *Zur Kenntnis der Heterochromosomen*, Arch. mikrosk. Anat., vol. 69, 1906.

⁽⁵⁾ Come è noto Wilson ha distinto tre categorie di eterocromosomi o cromosomi diversi dagli ordinari (autosomi) per il loro comportamento, cioè gli eterotropocromosomi, i microsomi e gli idiocromosomi. Queste due ultime categorie comprendono eterocromosomi che nelle spermatogonie si presentano doppi (diplosomi di Montgomery) gli eterotropocromosomi invece appaiono univalenti (monosomi di Montgomery). Gli eterotropocromosomi (monosomi) corrispondono al cromosoma speciale (De Sinety) chromatin nucleolus o cromosoma α di Montgomery, cromosoma accessorio di Mc Clung. Gli idiocromosomi sono tipicamente disuguali, i microsomi uguali; in generale cioè si potrebbe dire che i primi si presentano come eterodiplosomi, i secondi come omodiplosomi. Gli eterocromosomi si distinguono essenzialmente per un diverso comportamento riguardo al concentramento della cromatina (eteropicosi secondo Gutherz), riguardo all'accoppiamento (eterosindesi o asindesi-Gutherz) e riguardo alla divisione (eterocinesi in contrapposto all'eucinesi-Gutherz).

⁽⁶⁾ Uso qui il termine di meiosi per indicare i processi maturativi secondo la nomenclatura di Farmer e Moore: Farmer F. B. and Moore F. E. S., *On the meiotic phase (reduction divisions) in animals and plants*. Quart. Journ. of micr. Sc., N. 192, 1905.

Cinesi spermatogoniali. — Quell'aspetto caratteristico del nucleo delle spermatogonie seconde, per il quale apparisce evidente la formazione di ogni cromosomo da un determinato territorio nucleare, è stato per la prima volta minutamente descritto da Sutton ⁽¹⁾ in *Brachystola*. Ma, per quanto i moderni autori di ricerche sulla spermatogenesi degli insetti non lo ricordino, un polimorfismo nucleare di tal natura era già stato visto da Bütschli ⁽²⁾ in *Periplaneta* fin dal 1876. Di recente Otte ⁽³⁾ ha descritto un caso simile in *Locusta* ed ha rilevato insieme coll'interesse la rarità del fenomeno. Nel *Gryllus*, per il rilevante sviluppo dell'eterotropocromosomo (fig. 1), un tale aspetto del nucleo è molto istruttivo e mostra chiaramente la indipendenza del cromosomo accessorio che si disgrega e riapparisce in corrispondenza ad uno speciale vacuolo, come dalle mie ricerche chiaramente apparisce (fig. 2-3).



FIG. 1. — Spermatogonia in divisione che mostra lo sviluppo dell'eterotropocromosomo (e).



FIG. 2.

Spermatogonie mostranti la individualità dell'eterotropocromosomo.

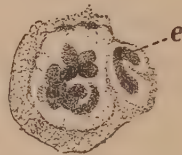


FIG. 3.

Si comprende che questo fenomeno ha un interesse tutto speciale per la dottrina sulla individualità dei cromosomi di Boveri ⁽⁴⁾, il quale già in questo senso ha discusso il reperto di Sutton. Io ritengo un tale aspetto delle spermatogonie seconde non raro, ma frequente negli Ortoteri, e credo che gli autori non abbiano abbastanza fermato l'attenzione su di esso.

Sul significato della cariosfera. — Designo con Blackmann ⁽⁵⁾ come " cariosfera " quella speciale formazione degli spermatociti primi risultante

⁽¹⁾ Sutton W. S., *The spermatogonial Divisions in Brachystola magna*. Bull. Univ. Kansas, Bd. I, 1902; *On the Morphology of the Chromosome Group in Brachystola magna*. Biol. Bull., Bd. IV, 1902.

⁽²⁾ Bütschli O., *Studien über die ersten Entwicklungsvorgänge der Eizelle, die Zelltheilung und die Konjugation der Infusorien*. Abh. der Senckenb. Naturf. Ges., Bd. X, 1876, riportato da Goldschmit R., *Untersuchungen über Eireifung, Befruchtung und Zellteilung bei Polystomum integerrimum*, Z. Wiss. Zool., V. 71.

⁽³⁾ Otte H., *Samenbildung und Samenreifung bei Lacusta viridissima*. Zool. Jahrb., Bd. 24, Anat., 1907.

⁽⁴⁾ Boveri Th., *Ergebnisse über die Konstitution der chromatischen Substanz des Zellkerns*. Fischer, Jena, 1904.

⁽⁵⁾ Blackmann M. W., *The spermatogenesis of the myriapods I. Notes on the spermatocytes and spermatids of Scolopendra*. Kansas Univ. Quart., X, 1901; *The spermatogenesis of the myriapods II. On the chromatin in the spermatocytes of Scolopendra heros*. Biol. Bull., vol. V, 1903.

dal condensamento della cromatina attorno all'eterotropocromosomo, nella quale il nucleo si trova in condizioni simili a quelle della vescicola germinativa nell'uovo immaturo (pseudo-germinal-vesicle stage di Blackmann). Nel nostro caso il condensamento della cromatina è accompagnato dalla fusione del cromosomo eterotropico col nucleolo (fig. 4) che in un certo momento nel suo aspetto ci ricorda, come giustamente osserva Häcker ⁽¹⁾, il modo di presentarsi dei nucleoli nelle vescicole germinative sul tipo dei Lamellibranchi (Lamellibranchiaten-Typus. Häcker).

Il significato della cariosfera è ancora molto dubbio, ragione per la quale ho fermato la mia attenzione su di essa, tanto più che nel mio caso la formazione della cariosfera costituisce un fenomeno assai appariscente. Mi son domandato se la cariosfera sia omologabile a una formazione sinaptica e,

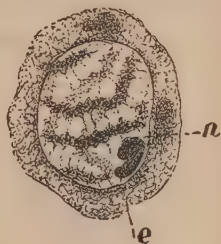


FIG. 4. — Nucleo pachiteno in cui è visibile la fusione dell'eterotropocromosomo (e) col nucleolo (n).

dovendo escludere tale supposizione, quale sia il suo significato rispetto ai fenomeni che precedono la diacinesi.

Dal punto di vista della sinapsi due erano le possibilità: trovare un rapporto tra cariosfera e sinapsi nel senso di coniugazione dei cromosomi (sinapsi in senso stretto di Mc Clung-sindesi di Häcker) e tra cariosfera e sinapsi nel senso di concentramento della cromatina (sinizesi di Mc Clung-sinapsi in senso stretto di Häcker) ⁽²⁾.

La cariosfera non ha rapporto colla sinapsi nel senso di sindesi: e infatti nel mio caso come vedremo si ha una sindesi presinaptica con juxtaposizione dei coniuganti (parasindesi di Häcker).

La cariosfera non ha rapporto colla sinapsi nel senso di sinizesi: infatti, nello stadio di gomito sinapteno, la cariosfera è in via di formazione e raggiunge il suo massimo sviluppo allo stadio di nucleo pachiteno.

Era necessario in ogni modo risolvere la suddetta quistione perchè da una parte non si è descritta nel *Gryllus* una vera sinapsi, d'altra parte, grazie

(1) Häcker V., *Die Chromosomen als angenommene Vererbungsträger*. Ergebnisse und Fortschritte der Zoologie, Bd. I, 1907.

(2) Questi due fenomeni da molti compresi sotto l'unica denominazione di sinapsi in molti casi coincidono ma, siccome possono essere dissociati, è meglio indicarli distintamente ed in ogni caso determinano la coincidenza o la dissociazione.

alle ricerche di Guenther (¹), si è pure ammesso che la contrazione cromatinica che avviene in corrispondenza al nucleolo possa tenere il luogo della sinapsi ordinaria.

Nel negare alla cariosfera ogni relazione col fenomeno sinaptico le mie ricerche si accordano con quelle di Blackmann relative ai Miriapodi e di Pantel e Sinéty (²) circa una simile formazione in *Notonecta*.

Credo che la natura della cariosfera sia stata da me posta in sufficiente evidenza, unendo l'osservazione microscopica a una considerazione fisiologica. Risulta infatti dalle mie osservazioni che il massimo incremento della cariosfera si ha in quello stadio degli spermatociti primi che rappresenta l'ultimo momento evolutivo degli elementi della gonade durante il riposo invernale.

Poichè la quasi totalità della cromatina si concentra allora in corrispondenza alla cariosfera (fig. 5), per me la cariosfera rappresenta un concen-



FIG. 5. — Spermatocito nello pseudo-germinal-vesicle stage mostrante lo sviluppo della cariosfera (c).

tramento della trofocromatina e della idiocromatina (secondo la dottrina di Schaudinn e Goldschmidt sulla duplicità del nucleo) (³) precedente la separazione completa delle due cromatine che porta alla formazione del nucleo diploteno e talora più tardi alla completa individualizzazione dei due costituenti cromatici dell'amfinucleo, in due nuclei distinti (⁴).

Quello che chiamiamo eterotropocromosomo della prima divisione meiotica è in realtà la fusione del nucleolo coll'eterotropocromosomo spermatozoniale, e rappresenta la totalità della trofocromatina. In questo senso la omologia ammessa da Moore e da Robinson (⁵) tra nucleolo ed eterotro-

(¹) Günther K., *Keimfleck und Synapsis. Studien an der Samenreifung von Hydra viridis*. Zool. Jahrb., Suppl. 7, 1904.

(²) J. Pantel e R. de Sinéty, *Les cellules de la lignée male chez le Notonecta glauca* L. Cellule, vol. 23, 1906.

(³) Goldschmidt R., *Der Chromidialapparat lebhaft funktionierender Gewebszellen*. Zool. Jahrb., Bd. 21, Anat., 1904.

(⁴) Con ciò intendo di non porre alcun pregiudizio relativamente alla quistione di una possibile influenza dell'eterotropocromosomo sulla determinazione del sesso.

(⁵) Moore J. E. S. and L. E. Robinson, *On the behaviour of the nucleolus in the spermatogenesis of Periplaneta americana*. Quart. J. microsc. Sc., vol. 48, 1905.

cromosomo dello spermatocito primo in certi casi non può riguardarsi come assoluta.

È interessante a proposito della ipotesi esposta che durante la intercinesi delle divisioni meiotiche i due nuclei propagatorio e somatico sono perfettamente individualizzati perchè l'eterotropocromosomo (che interpreto come nucleo somatico) si isola in forma di un nucleo minuscolo, come già Baumgartner e Guthertz hanno visto ed io riconfermo.

La cariosfera perciò rappresenta una formazione transitoria che precede la separazione della trofocromatina e della idiocromatina innanzi alla cinesi meiotica prima. Nello stadio di ibernazione la cariosfera persiste perchè la idiocromatina non si individualizza, per esprimermi con un termine usato da Strasburger i gamocentri $\frac{n}{2}$ ancora non sono attivi e la totalità della cromatina si trova mescolata. È molto probabile dal mio punto di vista teorico

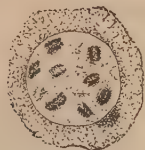


FIG. 6. — Sindesi presinaptica.



FIG. 7. — Spermatocito nello stadio di nucleo sinapteno.

che una cariosfera si trovi in molti artropodi ibernanti in cui l'evoluzione della gonade è arrestata allo stadio di nucleo pachiteno.

Ipotesi dello sdoppiamento (Faltungstheorie) e della *justaposizione* (Junktionstheorie, Häcker, 1907). — Nel mio caso come ha già accennato esiste una sindesi presinaptica in forma di parasindesi come è visibile nella figura riportata (fig. 6). Questo stadio, che io ritengo in parte omologo a quello di spermatocito con nucleo a cromatina diffusa descritto da taluni autori, merita secondo il mio modo di vedere una speciale attenzione riguardo alla discussa coniugazione dei cromosomi e al modo come si effettua. Esso segue immediatamente alla telofasi dell'ultima divisione spermatogoniale.

Secondo me il filo doppio nel nucleo sinapteno (fig. 7) non si forma per uno sdoppiamento di un filo unico (ipotesi dello sdoppiamento) ma per la justaposizione dei cromosomi omologhi. Escludo anche che il cordone doppio del nucleo diploteno che poi apparisce si formi per riavvicinamento di singoli tratti del dolichomena unico, in seguito alla sua torsione.

Postriduzione o preriduzione? — La prima divisione meiotica apparisce equazionale, con eterocinesi rispetto all'eterotropocromosomo, la seconda riduzionale, cioè per il modo speciale di formazione delle tetradi e loro

disposizione in corrispondenza al fuso (figg. 8, 9, 10, 11). Nella prima divisione vengono separate le metà $a|b$, $a|b$, dei due elementi omologhi di ciascuna tetrade, e nella seconda la diade ab si scinde nei suoi due componenti.

Non posso per ciò ammettere che ambedue le divisioni siano equazionali (o differenziali equazionali secondo Schäfer) o che si tratti di una postriduzione con simmissi, secondo i casi di Gross ⁽¹⁾, Schäfer ⁽²⁾ e Otte ⁽³⁾. relativi a Emitteri, Coleotteri e Ortotteri, recentemente descritti.



FIG. 8. — Gomitolo doppio della profasi della prima divisione meiotica.



FIG. 9. — Stadio diacinetico seguente il gomitolo doppio segmentato.



FIG. 10. — Formazione delle tetradi.

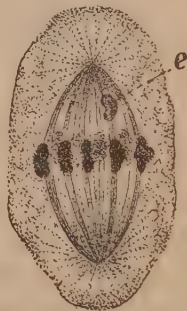


FIG. 11. — Prima divisione meiotica con eterocinesi dell'eterotropocromosomo.

Le mie ricerche non possono per ora aggiungere una nuova prova all'esistenza di tal modo di riduzione. Neppure ho trovato una doppia divisione longitudinale portante alla formazione delle tetradi, come ammette De Sinéty ⁽⁴⁾, nè una biriduzione nel senso di Wilcox ⁽⁵⁾. In conclusione, sebbene il modo sia alquanto differente, le mie ricerche relativamente alla

⁽¹⁾ Gross J., *Die Spermatogenese von Pyrrhocoris apterus L.* Zool. Jahrb., Bd. 23, Anat., 1907.

⁽²⁾ Schäfer F., *Die Spermatogenese von Dytiscus.* Ibidem, 1907.

⁽³⁾ Otte, Mem. citata.

⁽⁴⁾ De Sinéty R. *Recherches sur la biologie et l'anatomie des Phasmes.* Cellule, vol. 19, 1901.

⁽⁵⁾ Wilcox E. V., *Spermatogenesis of Caloptenus femur-rubrum and Cicada tibicen.* Bull. Mus. Comp. Zool. Harvard Coll. Boston, vol. 27. 1895.

riduzione si accordano piuttosto con quelle di O. Rath ⁽¹⁾ e di alcuni altri autori di più recenti memorie (Sutton, Mc Clung).

Sulla intercinesi. — Innanzi ho accennato che nella intercinesi si ha una separazione completa del nucleo propagatore e somatico (fig. 12), ed il fenomeno è molto interessante perchè si ha nel *Gryllus* un « semi-resting stage » e per il fatto che anche nelle cinesi spermatogoniali come ho messo in evidenza il cromosomo accessorio tende ad una perfetta individualizzazione. Così l'insieme delle cose è oltremodo suggestivo rispetto alla dottrina di Boveri.

Sulla individualità dei cromosomi. — A tal proposito, per la separazione ora accennata nella intercinesi, io debbo dichiarare incompleta la critica di Fick: « Auch die höchstinteressanten Beobachtungen von Henking, Montgomery, Paulmier, Sutton, Gross, Wilson u. a. über das Verhalten der Sonderchromosomen bei den Reifeteilungen sind natürlich in keiner Weise



FIG. 12. — Intercinesi mostrante la separazione completa dei nuclei propagatore e somatico (e). Semi-restig stage.

als Stütze für die von mir angefochtenen Hypothesen zu verwerten, da diese Teilungen ja ohne Ruhestadium aufeinanderfolgen ». Ciò che nel nostro caso non vale in un modo assoluto.

Non discuto per ora più largamente questo punto, mi limito a manifestare anche io la convinzione che la ipotesi del tatticismo di Fick ⁽²⁾, non può opporsi a quella della individualità di Boveri ⁽³⁾, in quanto riguarda una permanenza di struttura per la quale in potenza gli individui (unità tattiche di Fick) esistono sempre anche quando non appaiono in determinati momenti. Ciò che d'altra parte si spiega tenendo conto dei fenomeni che accompagnano l'evoluzione della cellula germinale, come nel caso esposto

⁽¹⁾ Rath O. vom, *Zur Kenntniss der Spermatogenese von Gryllotalpa vulg.* Arch. f. mikr. Anat., 40, Bd. 1892.

⁽²⁾ Ho creduto di chiamare così quella che Fick designa come Manovrierhypothese. Fick R., *Vererbungsfragen, Reduktions und Chromosomenhypotesen, Bastard-Regeln. Ergebnisse der Anatomie und Entwicklungsgeschichte*, Bd. 16, 1906.

⁽³⁾ Si veda in proposito l'ultimo scritto di Boveri Th., *Die Entwicklung dispermer Seeigel-Eier. Ein Beitrag zur Befruchtungslehre und zur Theorie des Kerns.* Zellen Studien, Heft 6, Jena, Fischer, 1907.

della formazione della cariosfera. Questo almeno è lecito sospettare sinchè Fick non avrà dimostrato che non esiste realmente una qualitativa differenza dei cromosomi, e ancora sinchè Fick non avrà provato che i costituenti elementari dei singoli cromosomi variano da una mitosi all'altra.

Zoologia. — La *Filaria Grassii*, n. sp. e la *Filaria recondita*, Grassi. Nota preliminare di G. NOÈ, presentata dal Socio B. GRASSI ⁽¹⁾.

Questa breve Nota ha soltanto per iscopo di stabilire la priorità del frutto di alcune mie ricerche sulle filarie del cane e sarà seguita a breve distanza da una pubblicazione definitiva.

Come è noto, la *Filaria recondita* non è conosciuta se non per la descrizione fattane nel 1890 da Grassi nel « *Centralblatt für Bakteriologie und Parasitenkunde*, VII Band » sopra un esemplare femminile immaturo. L'altra specie di filaria, passata finora inosservata dagli zoologi, è stata da me dedicata al professor Battista Grassi, mio illustre maestro.

FILARIA GRASSII, mihi, 1907.

Non posso descrivere, per ora, che la femmina, di cui posseggo 12 esemplari. Corpo esilissimo e molto trasparente. Lunghezza mm. 23-24, larghezza massima mm. 0,085-0,090. Estremità cefalica piriforme lunga circa 113 μ , larga circa 70 μ . Posteriormente ad essa il corpo si restringe a mo' di collo, poi s'allarga gradatamente fino ad assumere il diametro massimo. Dietro al così detto collo esistono due rigonfiamenti, uno debolissimo, *giugulare* ⁽²⁾, a circa 260 μ dall'estremità cefalica, l'altro cospicuo ed interessante tutta la superficie cilindrica della regione corrispondente per una lunghezza di circa 120 μ . Esso fa acquistare al corpo in questo punto il diametro di circa 100 μ ; dista dall'estremità cefalica circa 600 μ . Il primo corrisponde alle commissure *cefalica cutanea* (Looss) e *cefalica interna* (Looss); il secondo al segmento terminale della vagina, che, per esser ripiegato ad S, rigonfia in quel punto le pareti del corpo e che chiamerò quindi *rigonfiamento vaginale*. All'inizio di questo rigonfiamento, sulla linea mediana ventrale, si apre la vulva.

L'estremità caudale è molto assottigliata e, almeno nell'animale morto, sempre ripiegata ventralmente a larga curva, ma talvolta quasi ad uncino. La lunghezza del tratto caudale (compreso cioè fra l'ano e la punta estrema posteriore del corpo) è di circa 190 μ .

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Spiegherò nella nota definitiva il significato di questa denominazione.

Nella parte anteriore dell'estremità cefalica piriforme sono visibili a stento quattro papille submediane, nello spessore della cuticola. L'estremità caudale termina con due punte laterali e perfettamente simmetriche, rispetto al piano mediano, costituite di cuticola robusta e massiccia. Innanzi a questa e ventralmente esistono due deboli rigonfiamenti a calotta, toccantisi sulla linea mediana ventrale e sostenenti ognuna una piccola papilla di senso nello spessore della cuticola. Due altre papille come le precedenti trovansi una per lato in corrispondenza alle linee laterali, alla base delle due punte caudali.

L'esofago, nel quale sono mal distinte le due sezioni *muscolare* e *ghiandolare*, arriva fin quasi all'altezza della vulva, dove si attacca all'intestino chilifero. Esso incomincia subito dietro l'apertura boccale, ispessito a mo' di bulbo sferico. *L'intestino chilifero*, molto esile, decorre a larghe volute fra od esternamente agli uteri, e termina in un *retto* breve ed estremamente sottile, il quale sbocca a circa 190 μ dall'estremità caudale.

Gli *ovari*, come al solito asimmetricamente disposti, ossia l'uno più allo innanzi dell'altro, si ripiegano due volte sopra sè stessi nel senso longitudinale. Gli *ovidotti*, relativamente lunghi e stretti, son pure ripiegati due volte sopra se stessi. *Ricettacoli seminali* molto ampî, occupanti due buoni terzi della cavità viscerale, l'uno posto a poco meno di due mm. all'innanzi dell'apertura anale, l'altro a circa uguale distanza tra questa e il primo. Gli *uteri*, ampî, occupanti insieme quasi tutta la cavità viscerale, decorrono rettilinei fino al loro termine. A circa 650 μ dall'apertura vulvale essi si fondono in un condotto unico; l'utero impari a circa 567 μ dall'apertura vulvale si ripiega decorrendo posteriormente per circa 130 μ , poscia si ripiega di nuovo dirigendosi all'innanzi e trasformandosi ben tosto in una robustissima vagina. Questa finalmente, dopo un decorso rettilineo, poco dietro la vulva, si ripiega debolmente ad S, ispessisce le proprie pareti, e sbocca all'inizio del rigonfiamento vaginale, come è sopra spiegato.

Oociti nell'ultima porzione dell'ovario scarsissimi e grandi, disposti alternativamente in due sole serie lineari.

Le *uova*, perfettamente ovali, sparse disordinatamente ed in piccolo numero fra gli spermii, di cui è riempito il ricettacolo seminale, hanno una lunghezza di μ 34 ed una larghezza di μ 19. Esse si allineano ben tosto, avvenuta la fecondazione in doppia serie analoga a quella dei grandi oociti. Finalmente, col progredire della segmentazione, si dispongono in un'unica serie regolarissima addossandosi l'uno all'altro per i fianchi; allora misurano μ 55 di lunghezza e μ 25 di larghezza. Più oltre, per il grande sviluppo del *chorion*, queste uova si trovano trasformate in sorta di vesciche leggermente ovoidali, turgide e ripiene di un liquido trasparente nel quale sta raggomitolato l'embrione. Questi embrioforesi misurano 84 μ di larghezza e 91 μ di lunghezza. Gli embrioni poscia si vanno grado grado svolgendo

distendendo il chorion che li avvolge, finchè, per stadii successivi, essi trovansi distesi e rinchiusi in un esile e delicato astuccio cilindrico alquanto più lungo di essi. Gli embrioni, giganteschi, hanno una lunghezza di μ 567 ed una larghezza di μ 12,25.

L'habitat degli adulti può essere costituito tanto dalle sierose quanto dal connettivo lasso sottocutaneo od intermuscolare del cane: per lo più vivono nel connettivo sottocutaneo; una volta ne trovai uno nella cavità peritoneale.

Gli embrioni, contrariamente a quelli di altre filarie, non circolano nel sangue. È facile comprendere come per le rispettive dimensioni dell'adulto e degli embrioni, questi siano generati in numero molto piccolo rispetto a quello delle altre filarie.

In una prossima Nota preliminare farò conoscere l'ospite intermedio di questa interessantissima specie di filaria ed il suo sviluppo larvale.

FILARIA RECONDITA, Grassi, 1890.

Di questa specie posseggo da varii anni molti esemplari femminili e maschili.

Femmina: lunghezza mm. 26-28; una volta trovai un esemplare lungo 30 mm. Larghezza massima, corrispondente alla regione dello stomaco ghiandolare, 144 μ ; nell'esemplare di 30 mm., 157 μ . La larghezza va dalla metà del corpo in poi leggermente e gradatamente decrescendo tanto che pochi mm. innanzi all'apertura anale si riduce a circa 126 μ .

Maschio: lunghezza 12 mm., ad estremità caudale ravvolta a spira; larghezza massima 100-106 μ .

Estremità cefalica piriforme, lunga circa 170-180 μ nella femmina, 157 μ nel maschio; larga 119 μ nella prima, 97 μ nel secondo. Il corpo, dietro ad essa va restringendosi a mo' di collo, poscia presenta un *rigonfiamento giugulare* a 315 μ dall'estremità cefalica in ambèdue i sessi; la femmina, poi, possiede un *rigonfiamento vaginale* lungo circa 190 μ , largo circa 163 μ , ad 819 μ dalla estremità cefalica. La vulva si apre appunto all'innanzi di questo rigonfiamento.

L'estremità caudale più o meno diritta nella femmina è invece ripiegata a spira come un cavatappi nel maschio; 3 sono i giri della spira. Il segmento caudale propriamente detto (cioè il tratto che si dilunga di là dall'ano) è lungo circa 222-230 μ nella femmina, largo alla base 57 μ , all'apice, ottusa, 13 μ ; nel maschio è lungo circa 132 μ , misurato sulla superficie concava, la quale è tale che, in una proiezione sopra di un piano, appare fatta a semicerchio regolarissimo colla estrema punta caudale e colla apertura anale disposte agli estremi del diametro. Nella parte anteriore dell'estremità cefalica esistono otto papille piccolissime nello spessore della cuticola, disposte secondo l'ordine già descritto da Grassi, ossia a quattro a

quattro in due piani trasversali sovrapposti, ed a due a due sulle linee sub-mediane. Inoltre, sono visibili, a forte ingrandimento, due papille laterali le quali sembrano costituire lo sbocco di particolari ghiandole (ghiandole cefaliche?)

L'estremità caudale termina in ambedue i sessi con tre punte costituite di cuticula robusta e massiccia: la mediana più grossa e conica, rappresenta l'estremità morfologica dell'animale, le altre più brevi, compresse e triangolari, corrispondono alle linee laterali. Queste tre punte formano un apparato probabilmente meccanico, la cui base misura $13\ \mu$ in senso dorsoventrale.

Innanzitutto a questo apparato e ventralmente si sollevano qui pure due calotte ognuna delle quali sostiene una papilla di senso nello spessore della cuticula; anche qui esistono due altre papille, una per lato, alla base ed esternamente alle punte laterali. Oltre a queste papille esistono anche le così dette *papille del collo* (*Halspapillen*) in numero di due, una per parte, a $412\ \mu$ dall'estremità cefalica, poco posteriormente quindi al rigonfiamento giugulare; giacciono nella metà dorsale dei campi laterali.

L'esofago è ben distinto in stomaco muscolare e stomaco ghiandolare. Il primo, che incomincia dietro la cavità boccale con un ispessimento della parete a mo' di bulbo ovoidale, meno appariscente nel maschio, ha una lunghezza di $400\ \mu$ all'incirca ed una larghezza di circa $22\ \mu$. Lo stomaco ghiandolare lungo circa mm. 2,400 nella femmina e mm. 1,900 nel maschio, è molto più grande dello stomaco muscolare e riempie gran parte della cavità viscerale: siccome in questa regione esistono anche le estremità degli uteri pari, l'utero impari e si avvolge in anse numerose e strette la lunga vagina, oppure incomincia con anse brevi il testicolo, così la parete del corpo è costretta a dilatarsi; il diametro è massimo appunto in questa regione. Lo stomaco ghiandolare comunica per mezzo d'una valvola con l'intestino chilifero. Questo, senza offrire nulla di notevole all'osservazione, decorre piuttosto sottile, a larghe volute intorno ai due uteri, finchè sbocca in un retto breve ed esile, dopo essersi dilatato per un certo tratto.

Gli ovari asimmetricamente disposti, presentansi ripiegati sopra sè stessi e mettono, mediante lunghi ovidotti, in *ricettacoli seminali* dei quali il più anteriore giace a mm. 4,50 innanzi all'apertura anale, il posteriore a circa uguale distanza tra questa ed il primo.

Gli *uteri*, ampii, occupanti insieme quasi tutta la cavità viscerale, decorrono rettilinei fino al loro termine ossia fino a circa $819\ \mu$ dietro la vulva ove si fondono in un unico condotto. Questo finalmente mette in una lunga vagina variamente tortuosa la quale sbocca nella vulva, dopo essersi ripiegata strettamente ad S ed aver ispessite le proprie pareti.

Le uova, perfettamente ovali, osservate nel ricettacolo seminale, misurano una lunghezza di $26\ \mu$ per una larghezza di $17\ \mu$. Gli uteri appaiono infarciti di nn'enorme quantità di uova e di embrioni a varii stadii di svi-

luppo; poco prima di arrivare alla riunione dei due uteri si vedono gli embriofori in forma di vescichette ovoidali lunghe 100 μ , larghe 70, contenenti l'embrione completamente sviluppato e raggomitolato sopra se stesso. Nell'utero impari gli embrioni, lacerato l'involucro, si liberano e si dirigono verso la vagina.

Gli embrioni corrispondono perfettamente ai nematodi da me osservati varii anni or sono nel sangue di alcuni cani e descritti a pag. 35, 36 del mio lavoro « *Sul ciclo evolutivo della Filaria Bancrofti, Cobbold, e della Filaria immitis, Leidy* ⁽¹⁾ ». Essi hanno una lunghezza di 216 μ ed una larghezza di μ 4,30; sono relativamente scarsi nel sangue, eccetto che il numero degli adulti non sia piuttosto elevato. Per quel che concerne la loro struttura ed i loro movimenti rimando per ora alla pubblicazione citata. Aggiungerò soltanto che raramente li ho veduti anch'io spingere coll'estremità cefalica contro il vetrino coprioggetti, fissarsi a qualche leucocito od a qualche filamento di fibrina e percuotere il liquido con rapidi movimenti a flagello. Non di rado, in questa posizione, erigono ed abbassano alternativamente l'uncino che trovasi all'estremità cefalica, destinato evidentemente ad aprirgli un passaggio attraverso la parete intestinale della pulce.

Il testicolo incomincia a circa 300 μ , meno variazioni individuali, dietro il confine tra lo stomaco ghiandolare e l'intestino chilifero; dopo un breve percorso ad anse si avvanza anteriormente sino a circa 200 μ dal medesimo punto, poscia si ripiega definitivamente all'indietro, decorrendo diritto al suo termine. Esile dapprima, il testicolo ingrandisce ben tosto occupando la maggior parte della cavità viscerale. Dei due *spiculi*, uno è più grande dell'altro.

Papille genitali (ossia le papille che circondano l'apertura ano-genitale) in numero di 11, delle quali una impari all'innanzi dell'apertura e due pari quasi sul bordo posteriore di essa. Le altre 8 disposte su due serie di quattro ciascuna, fiancheggianti l'apertura ano-genitale; la loro posizione reciproca e le loro dimensioni sono variabilissime, come farò meglio rilevare nella Nota definitiva.

Chimica. — *Alcune considerazioni sugli equilibri in sistemi ternari. (Sui prodotti di addizione fra nitroderivati aromatici e cloruro-mercurici).* Nota di LUIGI MASCARELLI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

⁽¹⁾ Ricerche fatte nel Laboratorio di Anatomia normale della R. Università di Roma ed in altri Laboratorii biologici. Vol. VIII, fasc. 3° e 4°, 1901.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° dicembre 1907.

- ATTI del VI Congresso internazionale di chimica applicata. Roma, 26 aprile-3 maggio 1906. Vol. I-VII (1907).
- BARGAGLI P. — Contribuzioni allo studio degli insetti che danneggiano i semi nella Colonia Eritrea. Firenze, 1907.
- CAMERA dei Deputati N. L. (Documenti). Seconda relazione sulle Bonificazioni. (Testo unico di legge approvato con Regio Decreto 22 marzo 1900, n. 195). Roma, 1907.
- DEL GUERCIO G. — Notizie intorno a due nemici nuovi e ad un noto nemico dell'olivo mal conosciuto. Con un cenno sui rapporti di uno di essi con i Microsporidi. Firenze, 1907. 8°. (Estratto dal « Redia ». Vol. IV, fasc. 2°).
- HEEMERT F. R. — Bestimmung der Höhenlage der Insel Wangeroog durch trigonometrische Messungen im Jahre 1888. Berlin, 1907. (Sitzungsberichte. XL 1907).
- MARIÉ G. — Formule relative à une condition de stabilité des Automobiles et spécialement des Autobus. (Oscillations diverses). Paris, 1907. 8°. (Extrait des Mémoires de la société des Ingenieurs civils de France).
- MARIÉ G. — Les dénivellations de la Voie et Oscillations du matériel des Chemins de fer. Paris, 1906. 8°. (Extrait des Annales des Mines 1905).
- MARIÉ G. — Les oscillations du matériel des Chemins de fer à l'entrée en courbe et à la sortie. Paris, 1906. (Extrait des Mémoires de la société des Ingenieurs civil, 1905).
- MARIÉ G. — Les oscillations du matériel dues au matériel lui-même et les grandes vitesses des Chemins de fer. Paris, 1907, 4°. (Extrait de la Revue Générale des Chemins de fer et des Tramways).
- MARIÉ G. — Les Oscillations du matériel et la voie. (Les grandes vitesses des chemins de fer). Paris, 1906. 8°. (Extrait des mémoires de la société des Ingenieurs civils 1906).
- MATTIROLO O. — Gli autoptici di Carlo Vittadini e la loro importanza nello studio della Idnologia. Milano, 1907. 8°. (Estratto dagli Atti del Congresso dei naturalisti italiani. 1906).
- MATTIROLO O. — La Flora Segusina dopo gli studi di G. F. Re. (*Flora Segusiensis*, 1805. Flora Segusina, Re-Caso, 1881-82). Torino, 1907. 4°. (Accademia reale delle scienze di Torino, 1906-1907).
- MATTIROLO O. — Michele Antonio Piazza da Villafranca (Piemonte) e la sua opera in Sardegna. 1748-1791. Torino, 1906. 4°. (Accademia reale delle scienze di Torino. 1905-1906).
- MATTIROLO O. — Parole pronunziate nell'Archiginnasio di Bologna il 12 giugno 1907, in occasione delle onoranze per Ulisse Aldrovandi nel III centenario dalla sua morte. Torino, 1907. 8°. (Accademia delle scienze di Torino. 1906-1907).
- MATTIROLO O. — Sulla opportunità di conservare il nome generico di « Rea » (Bertero) in luogo di quello di « Dendroseris » (Don). Torino, 1907. 8°. (Accademia reale delle scienze di Torino. 1906-1907).
- MEMORIA que dirige al Congreso Nacional de los Estados Unidos de Venezuela al Ministro de Guerra y Marina en 1907. Caracas. 4°. Tomo II.
- STROOBANT P. etc. — Les Observatoires astronomiques et les astronomes. Bruxelles, 1907. 8°.
- TYWONOWYCZ I. — Die Erde als Quelle der Wärme. Wien, 1907. 8°.

